1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

1.- HISTORIA DE LA PROBABILIDAD

Los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40000 años; así por ejemplo, los dados se utilizaron tanto en el juego como en ceremonias religiosas. Las civilizaciones antiguas explicaban el azar mediante la voluntad divina. En el Renacimiento el abandono progresivo de explicaciones teológicas conduce a una reconsideración de los experimentos aleatorios.

Ya en el siglo XVI, los matemáticos italianos comenzaron a interpretar los resultados de experimentos aleatorios simples y a finales del siglo XVI, existía un análisis empírico de los resultados aleatorios.

El desarrollo del análisis matemático de los juegos de azar se produce lentamente durante los siglos XVI y XVII. El cálculo de probabilidades se consolida como disciplina independiente en el período que transcurre desde la segunda mitad del siglo XVII hasta comienzos del siglo XVIII. La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII cuando Fermat y Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Aunque algunos marcan sus inicios cuando Cardano (jugador donde los haya) escribió sobre 1520 *El Libro de los Juegos de Azar* (aunque no fue publicado hasta más de un siglo después, sobre 1660) no es hasta dicha fecha que comienza a elaborarse una teoría aceptable sobre los juegos.

La teoría de la probabilidad fue aplicada con buenos resultados a las mesas de juego y con el tiempo a otros problemas socioeconómicos.

Durante el siglo XVIII el cálculo de probabilidades se extiende a problemas físicos y actuariales (seguros marítimos). El factor principal impulsor es el conjunto de problemas de astronomía y física que surgen ligados a la contrastación empírica de la teoría de Newton. Estas investigaciones van a ser de importancia fundamental en el desarrollo de la Estadística.

La industria de los seguros, que nació en el siglo XIX, requería un conocimiento exacto del riesgo de perder pues de lo contrario no se podían calcular las pólizas.

Posteriormente, se estudia la probabilidad como un instrumento que permitiría entender los fenómenos sociales.

La necesidad de comparar con exactitud los datos observados con la teoría requería un tratamiento riguroso del mismo, que va a dar lugar a la teoría de errores. Durante el siglo XVIII, debido muy particularmente a la popularidad de los juegos de azar, se publicaron varios documentos de este tipo. Jakob Bernouilli (1654-1705) *Ars Conjectandi* (publicado en 1713 aunque escrito sobre 1690) y Auguste De Moivre (1667-1754) contribuyeron de forma importante a este desarrollo.

Jacob Bernoulli proporciona la primera solución al problema de estimar una cantidad desconocida a partir de un conjunto de mediciones de su valor que, por el error experimental, presentan variabilidad. Fue pionero en la aplicación del cálculo infinitesimal al cálculo de probabilidades.

También, además de Abraham de Moivre, el reverendo Thomas Bayes y Joseph Lagrange inventaron fórmulas y técnicas de probabilidad.

El impulso fundamental proviene de la obra de Pierre Simon, Marqués de Laplace, publicó *Théorie analytique des probabilités* en el que expone un análisis matemático sobre los juegos de azar, y fue quien indujo la primera definición explícita de probabilidad. También desarrolló la ley normal como modelo para describir la variabilidad de los errores de medida, formuló y estimó el primer modelo explicativo estadístico. Por su parte, Gauss hizo su aportación en la estimación de modelos estadísticos.

Bravais, geólogo y astrónomo, es el primero en considerar la relación entre errores de medida dependientes entre sí; Benjamín Pierce propone el primer criterio para rechazar observaciones heterogéneas con el resto y S. Newcomb, el más famoso astrónomo americano del siglo XIX, introduce los primeros métodos de estimación cuando hay errores fuertes en algunos datos (Estimación Robusta).

Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemática. A principios del siglo XX el matemático ruso A. Kolmogorov la definió de forma axiomática y estableció una teoría más amplia como es la teoría de la medida.

En la actualidad la teoría matemática de la probabilidad constituye el fundamento de las aplicaciones estadísticas tanto en la investigación social como en la toma de decisiones.

La necesidad de sortear la incertidumbre nos lleva a estudiar y aplicar la teoría de la probabilidad. Para tener éxito en la toma de decisiones, se necesita la capacidad de tratar sistemáticamente con la incertidumbre misma mediante cuidadosas evaluaciones y aplicaciones de métodos estadísticos concernientes a las actividades de los negocios.

Las aplicaciones de métodos estadísticos en las diferentes áreas son numerosas.

2.- INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iniciales en las que se produce la experiencia sean las mismas. Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

En el lenguaje habitual, frases como "probablemente...", "es poco probable que...", "hay muchas posibilidades de que..." hacen referencia a esta incertidumbre.

La **teoría de la probabilidad** pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo. Por otra parte, cuando aplicamos las **técnicas** estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas.

El objetivo del Cálculo de Probabilidades es el estudio de métodos de análisis del comportamiento de fenómenos aleatorios.

Aunque desde sus orígenes siempre han estado ligadas, es cierto que existe un cierto paralelismo entre la estadística descriptiva y el cálculo de probabilidades, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

ESTADÍSTICA	PROBABILIDAD
f_i, F_i	Probabilidad
Variable Unidimensional	Variable aleatoria
Variable Bidimensional	Vectores aleatorios
Distribución de frecuencias	Distribución de Probabilidad (Función de distribución)
Medias, Momentos	Esperanza, Momentos
Independencia Estadística	Independencia Estocástica
Series Temporales	Procesos Estocásticos

En la actividad diaria nos encontramos con ciertos tipos de fenómenos que se pueden reproducir un gran número de veces, en condiciones similares dando lugar a un conjunto de dos o más posibles resultados. Estos fenómenos pueden ser de dos tipos: determinísticos y aleatorios.

2.1.- Conceptos básicos

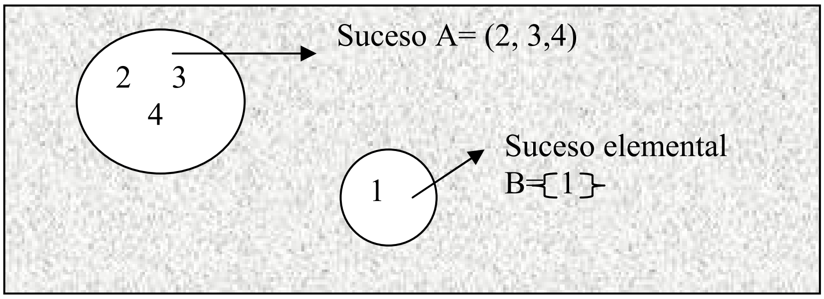
Con ellos vamos a dar una serie de conceptos para poder desarrollar este tema y los sucesivos.

- **Fenómeno determinístico**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales se obtienen siempre los mismos resultados.

- **Fenómeno aleatorio**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: cuando lanzamos una moneda al aire observando la sucesión de caras y cruces que presentan.

- **Experimento aleatorio.-** Operación que repetimos bajo idénticas condiciones iniciales y no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: lanzamiento de un dado observando la sucesión de números que se presentan {1, 2, 3, 4, 5,6}.

- **Suceso elemental**.- Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio; luego un suceso elemental consta de un solo elemento del espacio muestral (**E**). En el ejemplo del dado: {1}.



- **Espacio muestral**.- Conjunto de todos los sucesos elementales del experimento aleatorio y lo designaremos como (**E**). Ejemplo del dado: {1,2,3,4,5,6}

- **Suceso**.- Conjunto formado por uno o más sucesos elementales, es decir, un subconjunto de resultados elementales del experimento aleatorio. Ejemplo del dado: nos interesa saber si el resultado a sido un número impar **A**={1, 3,5}.

- **Suceso seguro**.- Coincide con el suceso elemental, ya que al realizar el experimento aleatorio se obtendrá con seguridad uno de los posibles resultados o sucesos elementales, y por tanto ocurrirá (**E**).

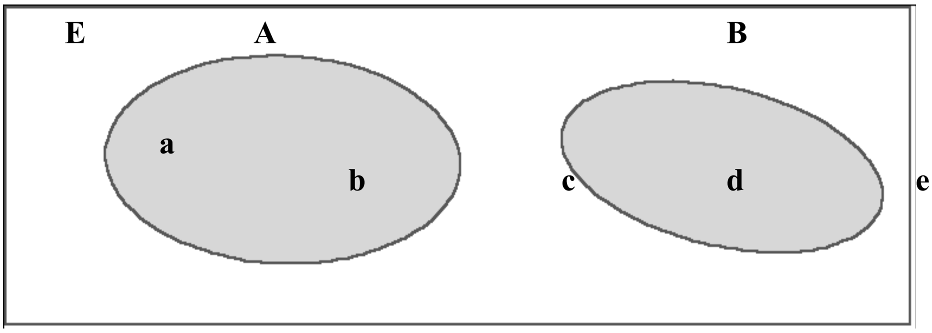
- Dos **sucesos** se dice que son **iguales**, cuando todo suceso elemental de uno está en el otro, y viceversa.

- **Suceso imposible**.- Es el que no tiene ningún elemento del espacio muestral (**E**), y por tanto no ocurrirá nunca, y se representa como ∅. Ejemplo: En el lanzamiento del dado no puede darse el 7.

- **Suceso complementario a un suceso *A*:** Es el suceso que se verifica si, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica **A.** Se acostumbra a denotar con el símbolo **Ā.**

- **Sucesos incompatibles:** Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

$$A = \{a, b\},\ B = \{d, e\}$$



- Si tenemos dos sucesos cualesquiera **A**, **B**: **A** está contenido en **B**, entonces **B** no está contenido en **A,**

$$\mathbf{A \subset B \ \Rightarrow\ B \not\subset A}$$

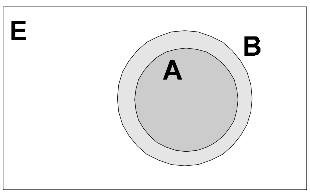
- Si tenemos dos sucesos cualesquiera A, B: donde **A** está contenido en **B** y **B** está contenido en **A**, entonces **A = B.**

$$\mathbf{A, B \,/\, A \subset B \ \Rightarrow\ B \subset A \ \Rightarrow\ A = B}$$

2.2.- Operaciones con sucesos

Al ser los sucesos aleatorios nada más que subconjuntos de un conjunto ***E*** (espacio muestral), podemos aplicarles las conocidas operaciones con conjuntos, como son la unión, intersección y diferencia:

- **Suceso contenido en otro.-** Un suceso **A** se dice que está **contenido** o **inducido** en otro **B** si siempre que se verifica **A** se verifica **B**. Se representa A⊂B.



Ejemplo: Considerando el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado, si designamos por:

A= que aparezca el 2 ó el 4 = $\{2,4\}$
B= que aparezca un número par: $\{2,4,6\}$

El suceso **A $\subset$ B**, pues los resultados o sucesos elementales 2 y 4 de A, pertenecen a B. Diremos también que A **implica** a B y lo denotaremos **A $\Rightarrow$ B.**

- **Igualdad de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B, diremos que son **iguale**s, si siempre que ocurre el suceso A también ocurre el suceso B, y siempre que ocurre el suceso B ocurre el suceso A, y lo indicaremos por **A = B**. Es decir, si se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} A\subset B \\ B\subset A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \mathrm{A = B}$$

Ejemplo: Sean los sucesos:

A = obtener un número par al lanzar un dado = $\{2,4,6\}$
B = obtener un múltiplo de 2 = $\{2\}$

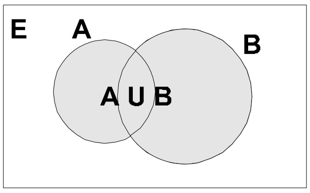
Aquí se verifica que:

A$\subset$B pues siempre que ocurre A ocurre B
B$\subset A$ pues siempre que ocurre B ocurre A

Luego A = B.

- **Diferencia de sucesos.**- Dados dos sucesos aleatorios $A, B \in E$, se llama ***suceso diferencia*** de ***A y B*** y se representa mediante ***A/B***, o bien, ***A-B*** al suceso aleatorio formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a ***A***, pero no a ***B.***

- **Unión de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B se llama **unión de A y B**, y se representa por A$\cup$B, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B, es decir, a todos los elementos que están en A ó están en B.



Ejemplo: Sean los sucesos:

A = obtener el lanzamiento de un dado un número impar = $\{1,3,5\}$
B = obtener un número mayor que 4 = $\{5,6\}$

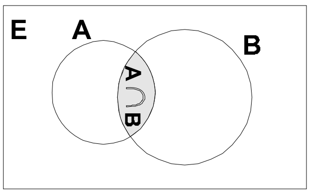
El suceso unión será:

$A \cup B = \{1,3,5\} \cup \{5,6\} = \{1,3,5,6\}$

O sea, obtener un 1, un 3, un 5, ó un 6 en el lanzamiento del dado.

- **Intersección de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B, se llama suceso **intersección de A y B**, y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente A y B.

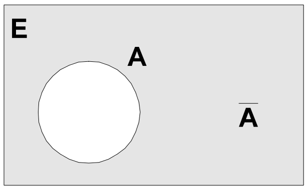
Ejemplo: Utilizando el ejemplo de la unión, la intersección viene dada por:



- **Sucesos Incompatibles.-** Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman **sucesos incompatibles**. Obsérvese que un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

$$A \cap B = \phi .$$

- **Sucesos Complementarios.-** Dado un suceso **A**, se llama **suceso contrario** o **complementario** de **A**, y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza **A** y recíprocamente.



El suceso contrario de **E** es ϕ y recíprocamente.

Ā = E – A.

Ejemplo: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,2\} \rightarrow \overline{A} = \{3,4,5,6\}$

$B = \{2,4,6\} \rightarrow \overline{B} = \{1,3,5\}$

$C = \{3,5\} \rightarrow C = \{1,2,4,6\}$

2.3.- Propiedades de la unión e intersección de sucesos

Seguidamente se presentan una serie de propiedades que verifican tanto la unión como la intersección de dos o más sucesos. Tales propiedades son comunes a ambas, como se muestran en la siguiente tabla:

	UNION	*INTERSECCION*
1. Asociativa	(AUB)UC=AU(BUC)	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
2. Conmutativa	AUB=BUA	$A\cap B=B\cap A$
3. Idempotente	AUA=A	$A\cap A=A$
4. Simplificativa	$AU(B\cap A)=A$ $A\cap(BUA)=A$	
5. Distributiva	$AU(B\cap C)=(AUB)\cap(AUC)$ $A\cap(BUC)=(A\cap B)U(A\cap C)$	
Todo suceso A del espacio de sucesos tiene otro llamado contrario, $\overline{A}$ tal que: $AU\overline{A}=E$ $\quad$ $A\cap\overline{A}=\phi$		

De estas propiedades surgen las siguientes consecuencias inmediatas:

i) AUϕ=A , $A\cap\phi=\phi$
ii) $A\cap E=A$, AUE=E
iii) Leyes de **Morgan:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \text{ U } \overline{B}$, $\overline{A \text{ U } B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ejemplo: Sea un experimento aleatorio de lanzar un dado y definimos:

A = {par}
B = {impar}
C = {múltiplo de 3}

Calcular:

$a)\ A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

$b)\ A \cup C = \{1,3,4,6\}$

$c)\ B \cup C = \{1,3,5,6\}$

$d)\ \overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

$e)\ A \cap B = \emptyset$

$f)\ A \cap C = \{6\}$

$g)\ B \cap C = \{3\}$

$h)\ B - C = B \cap \overline{C} = \{1,5\}$

$i)\ (A \cup B) \cap C = \{3,6\}$

3.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Para definir la probabilidad vamos a dar varias definiciones o conceptos de probabilidad. Con estas definiciones se pretende expresar de manera objetiva y precisa el grado de ocurrencia de ciertos resultados de un fenómeno aleatorio.

Concepto Frecuentista.- Dado un suceso **A** que se repite un número de veces, si observamos la frecuencia con que se repite ese suceso, obtendremos las probabilidades asociadas asignando la frecuencia relativa a cada suceso.

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso **A** al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **frecuencia relativa** de un suceso **A** al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento, que viene dada por:

$$\mathbf{f_r(A) = \frac{f_a(A)}{n}}$$

donde **n** el número de veces que se repite el experimento.

Definición de Laplace.- La probabilidad de cualquier suceso **A** es igual al cociente entre el número de resultados favorables o resultados que integran el suceso **A** y el número total de elementos o posibles resultados del espacio muestral **E**.

$$P(A) = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

Como hemos venido observando los sucesos los consideremos como conjuntos, siendo válido para los sucesos todo lo estudiado en la teoría de conjuntos. Para llegar a la construcción axiomática del Cálculo de Probabilidades, necesitamos dar unas estructuras algebraicas básicas construidas sobre los sucesos de la misma manera que con construían sobre los conjuntos.

Todo fenómeno aleatorio lleva asociado un espacio muestral. Para medir el grado de ocurrencia de los sucesos, definimos el **Álgebra de Boole**, álgebra de sucesos o sigma álgebra, que verifica siguientes condiciones:

1.- El complementario de un suceso **A** que pertenece al Algebra también pertenece al algebra:

$$A \in \mathcal{A} \rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

2.- Si tenemos una serie de sucesos finitos (A_1, A_2,…..A_n) infinitos numerables, que pertenecen al $\mathcal{A}$, la unión de todos ellos tiene que pertenecer a $\mathcal{A}$.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

3.- El suceso imposible también pertenece al $\mathcal{A}$,

$$\phi \in \mathcal{A}$$

Basándose en dicho álgebra, kolmogorov dio la definición axiomática de probabilidad que viene dada a continuación.

Se llama **probabilidad** asociada al *álgebra de Boole* a una aplicación $\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que, a cada valor de **A** le hace corresponder una probabilidad, que verifica los siguientes axiomas:

- **Axioma 1:** Siempre es positiva.

$$\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$A \subset E,\ A \in \mathcal{A} \longmapsto 0 \leq \mathcal{P}[A] \leq 1$$

- **Axioma 2:** Siempre estará entre 0 y 1.

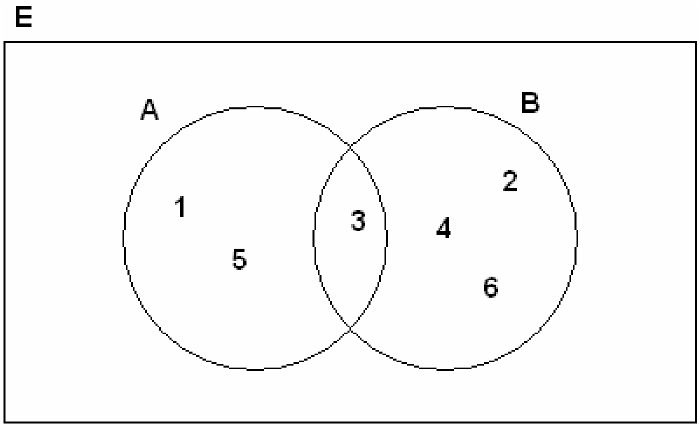
$$P[E] = 1.$$

- **Axioma 3:** Sea $A_1 \ldots. A_n$ sucesos tales que son disjuntos dos a dos (es decir, la intersección es Ø) $A_i \cap Aj = \phi$, la probabilidad es la suma de todas las probabilidades de sucesos.

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i).$$

Del tercer axioma se desprende que si que si $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ con $A_i \cap A_j = \phi$, entonces $P[A] = P[A_1] + P[A_2] + \cdots + P[A_n]$, es decir $P(\bigcup A_i) = \Sigma P(A_i)$.

Ejemplo: Calcula $P(A \cap B)$.



La solución es:

$$P(A) = \{1,3,5\}$$
$$P(B) = \{2,3,4,6\}$$
$$P(1,3,5) + P(2,3,4,6) - P(3)$$

Solo cuando $P(A \cap B) = 0$, es decir que son disjuntos.

Ejemplo: Sea un experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire los dados que no están cargados, y se considera espacio muestral el resultado de la suma de los valores obtenidos, calcular:

1.- Espacio muestral: $E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} =$ 11 elementos

2.- La probabilidad del suceso $A = \{2\}$ $\quad P(A) = \dfrac{1}{11}$

3.- La probabilidad del suceso $B = \{par\}$ $\quad P(B) = \dfrac{6}{11}$

4.- La probabilidad del suceso $C = \{10,11,12\}$ $\quad P(C) = \dfrac{3}{11}$

5.- La probabilidad del suceso $D = \{4,5,6,7\}$ $\quad P(D) = \dfrac{4}{11}$

6.- $P(A \cup B) = \{2,4,6,8,10,12\} = 6/11$

7.- $P(A \cup C) = \{2,10,11,12\} = 4/11$

8.- $P(\overline{D} \cup C) = \{2,3,8,9,10,11,12\} = 7/11$

9.- $P(\overline{B} \cup D) = \{3,4,5,6,7,9,11\} = 7/11$

10.- $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = 10/11$

11.- $P(B \cup \overline{C}) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = 10/11$

12.- $P(B \cap D) = \{4,6\} = 2/11$.

3.1.- Espacio Probabilístico

Llamamos espacio probabilística a la terna formada por un espacio muestral, ***E;*** el álgebra de sucesos, $\mathcal{A}$, y una probabilidad, **P**, es decir a ***(E***, $\mathcal{A}$, ***P)***.

Sus propiedades son:

1) La probabilidad del complementario de ***A*** es 1 menos la probabilidad de ***A:***

$$\text{Prob}\,[\bar{A}] = 1 - \text{Prob}\,[A].$$

2) La probabilidad de la unión de ***A y B*** es igual a la probabilidad de ***A*** más la probabilidad de ***B*** menos la probabilidad de la intersección de ***A y B:***

$$\text{Prob}\,[A \cup B] = \text{Prob}\,[A] + \text{Prob}\,[B] - \text{Prob}\,[A \cap B].$$

3) La probabilidad del suceso vacío es 0:

$$\text{Prob}\,[\emptyset] = 0$$

4) Si ***A*** contiene a ***B,*** entonces la probabilidad de ***A*** es menor o igual que la probabilidad de ***B:***

$$A \subset B \rightarrow \text{Prob}\,[A] \leq \text{Prob}\,[B]$$

5) La probabilidad de ***A*** es menor o igual a ***1:***

$$\text{Prob}\,[A] \leq 1.$$

4.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

Hasta ahora hemos visto el concepto de probabilidad partiendo de que la única información que tenemos sobre el experimento es el espacio muestral. Sin embargo, en ocasiones se conoce que un determinado suceso ha ocurrido. ¿Modificará esta información adicional la probabilidad de que ocurra otro suceso?. Veremos que generalmente sí. A partir de esta idea surge la idea de probabilidad condicionada, que se define:

Sea un espacio probabilístico y un suceso **B** perteneciente al *Algebra de Boole*, tal que $P(B) \neq 0$, entonces se define la probabilidad de que ocurra **A** si antes ha ocurrido **B**, como:

$$P(B/A)=\frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \text{si } P(B) \neq O.$$

Análogamente podemos definir **P(A/B)** como

$$P(A/B)=\frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P}(B)} \quad \text{si } P(A) \neq O.$$

De las definiciones anteriores se deducen claramente las relaciones siguientes:

- $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B/A)$
- $P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A/B)$
- $P(A/B). P(B)= P(B/A). P(A)$
- $\dfrac{P(A/B)}{P(B/A)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}$
- $\boldsymbol{P(A/A)=1}$.
- Si ***A***, ***B*** son independientes $P(A \cap B)=0$, entonces: $\boldsymbol{P(A/B)=P(B/A)=0}$.
- A esta expresión se le conoce como regla de la multiplicación, que en general para un número ***k*** de sucesos viene dada por:

  $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2/A_1)....P(A_k/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})$

Ejemplo: De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras, se extraen sucesivamente 2 bolas. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos sean negras
b) Que las dos sean rojas
c) Que la primera se roja y la segunda negra
d) Que la segunda se roja sabiendo que la primera fue negra

La solución en cada apartado es la siguiente.

a) Sea N_1: Sacar la 1ª Negra
N_2: Sacar la 2ª Negra

$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = 5/14 \cdot 4/13$

b) Sea R1: Sacar la 1ª Roja
R_2: Sacar la 2ª Roja

$P(R_1 \cap R_2) = P(R1) \cdot P(R_2/R_1) = 9/14 \cdot 8/13$

c) Sea R_1: Sacar la 1ª Roja
N_2: Sacar la 2ª Negra

$P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2/R_1) = 9/14 \cdot 5/13$

d) Sea N_1: La 1ª es Negra
R_2: La 2ª es Roja

$P(R_2/N_1) = 9/13$ (quedan 13 bolas de las cuales 9 son rojas).

Ejemplo: Sabiendo que al lanzar un dado ha salido un número par, hallar la probabilidad que este número haya sido un dos:

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \qquad P(A) = \{2\} = \frac{1}{6} \quad P(B) = \{2,4,6\} = \frac{3}{6}$$

5.- INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Sean **A** y **B** dos sucesos del espacio muestral. El suceso **A** se dice **independiente** del suceso **B** si el conocimiento de la ocurrencia de **B** no modifica la probabilidad de aparición de **A**, es decir, si

$$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(A) = P(A/B).$$

Propiedad: Si dos sucesos **A, B** son independientes, entonces siempre se verifica:

$$\boxed{\textbf{A es independiente de B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{P}[A \cap B] = \mathcal{P}[A] \cdot \mathcal{P}[B]}$$

De la definición y de esta propiedad se deduce que si los sucesos A y B son independientes, se verifica:

- Los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes.
- Los sucesos $\overline{A}$ y B son independientes.
- Los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.
- Decimos que ***n*** sucesos son independientes si se verifica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n) \text{ .}$$

Ejemplo: Se consideran dos sucesos, *A* y *B*, asociados a un experimento aleatorio con *P(A)*=0.7; *P(B)*=0.6; $P(\overline{A} \cup \overline{B})$=0.58. ¿Son independientes *A* y *B*?

Para ver si son independientes, comprobaremos si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$$

Por tanto, $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.58 = 0.42$

Por otro lado, $P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

Luego, *A* y *B* son independientes, pues $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.42$

Ejemplo: Sea un experimento aleatorio que consiste en lanzar un tetraedro regular cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y se definen los sucesos:

A = {1 ó 2}
B = {2 ó 3}
C = {2 ó 4}

Calcular:

$a)\ P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$b)\ P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$c)\ P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d) Probabilidad de obtener un 2

$$P(2) = P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$$

¿Son independientes los sucesos A, B y C?

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$
$$P(A \cap C) = P(A) * P(C) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$
$$P(B \cap C) = P(B) * P(C) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$

Significa que A es independiente de B, que A es independiente de C, que B es independiente de C.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(2) = 1/4$$
$$P(A) * P(B) * P(C) = 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$$
$$Luego,\ 1/4 \neq 1/8$$

No se cumple la anterior condición, por lo que A, B y C no son independientes entre sí, son independientes dos a dos.

Ejemplo: En una baraja de cartas hemos suprimido varias de ellas, entre los que quedan se verifican las siguientes probabilidades:

- Probabilidad de obtener un rey: 0,15
- Probabilidad de obtener una carta que sea bastos: 0,30
- Probabilidad de obtener una carta que no sea ni rey ni bastos: 0,6

Calcular:

- ¿Está entre ellas el rey de bastos?, caso afirmativo indicar su probabilidad.-
- ¿Cuántas cartas hay en la baraja?

P (ni Rey ni Bastos)= $P\left(\overline{\mathrm{Re}\,y} \cap \overline{Bastos}\right) = 0{,}6 \Rightarrow$

$P(\mathrm{Re}\,y \cup Bastos) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P(\mathrm{Re}\,y \cup Bastos) = P(\mathrm{Re}\,y) + P(Bastos) - P(\mathrm{Re}\,y \cap Bastos) \Rightarrow$

$0{,}4 = 0{,}15 + 0{,}3 - P(\mathrm{Re}\,y \cap Bastos) \Rightarrow$

$P(\mathrm{Re}\,y \cap Bastos) = 0{,}15 + 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}05$

Por lo que al ser mayor que cero, indica que está el rey de bastos, con una probabilidad de 0,05.-

Se pasa 0,05 en forma de fracción:

$$0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Lo que indica que si la probabilidad de sacar una carta (el rey de bastos) es de 1 entre 20, quiere decir que el número total de cartas en la baraja es de 20 (por la definición de Laplace).

6.- TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

En primer lugar, antes de definir el teorema, es necesario definir que es un conjunto completo. Se dice que un conjunto de sucesos $A_1, A_2, ..., A_n \in E$ forman un sistema completo si verifica:

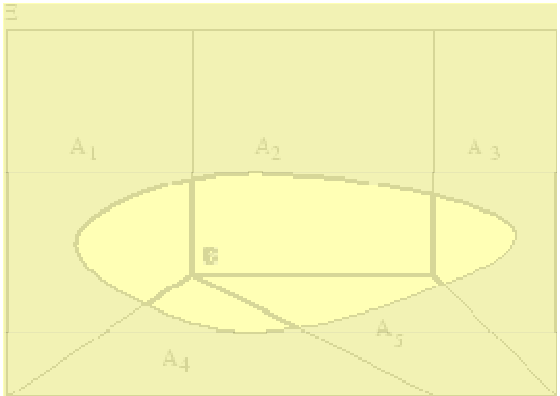
- Son incompatibles dos a dos, es decir $A_i \cap A_j \neq 0, \forall_{i,j}$
- Que la unión de todos ellos es el espacio muestral, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E.$

Con todo esto se define el teorema de la **Probabilidad Total** como:

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea ***B*** un suceso para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso ***B*** viene dada por:

$$\mathbf{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}.$$

__Figura:__ Si A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *forman un sistema completo, podemos calcular la probabilidad de B a partir de las cantidades* $\boldsymbol{P[B \cap A_i]}$*, o lo que es lo mismo,* $P[B / A_i] \cdot P[A_i]$



La demostración del teorema es fácil de hacer como demostramos.

Si $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$ ***y*** $\boldsymbol{A_5}$ forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, podemos calcular la probabilidad de ***B*** a partir de las probabilidades de estos sucesos, es decir, a partir del suceso ***B*** se puede descomponer como:

$$B = B \cup E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n),$$

que aplicando las propiedades de los sucesos es fácil ver que todo esto es igual a

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Calcular la probabilidad de B es lo mismo que calcular la probabilidad de la expresión anterior, es decir

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n),$$

ya que al ser un sistema completo, las intersecciones son vacías. Además, como sabemos que

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A / B) \cdot P(B),$$

entonces la probabilidad de se puede descomponer como

$$P(B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) \cdot P(A_n) = \sum P(A_i) \cdot P(B / A_i).$$

Ejemplo 1: Se tienen dos urnas, la nº1 tiene 3 bolas blancas y 2 negras, la nº2 tiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que sea blanca.

Sea A_1: “elegir la urna nº1”
A_2: “elegir la urna nº2”
B: “extraer bola blanca”

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 1/2 \cdot 3/5 + 1/2 \cdot 2/5 = 1/2.$$

Ejercicio 2: Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primero línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

Solución:

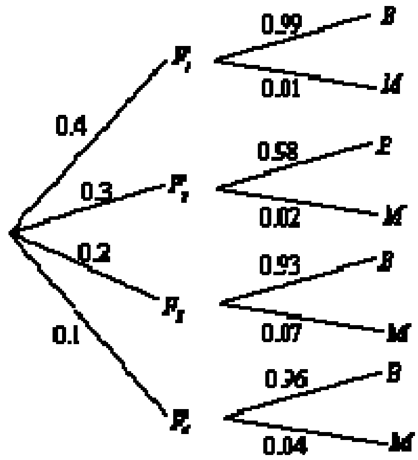
Para obtener la solución definimos el suceso "sufrir una avería" (Av) puede producirse en las tres líneas, (L_1, L_2, L_3). Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

$$\begin{aligned} P(Av) &= P(L_1) \cdot P(Av/L_1) + P(L_2) \cdot P(Av/L_2) + P(L_3) \cdot P(Av/L_3) = \\ &= 0.6 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.01 = \\ &= 0.012 + 0.012 + 0.001 = 0.025 \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F_1, F_2, F_3 y F_4. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Solución:

Llamando M = "el producto está defectuosamente envasado", se tiene que este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:



$P(M) = P(F_1) \cdot P(M/F_1) + P(F_2) \cdot P(M/F_2) + P(F_3) \cdot P(M/F_3) + P(F_4) \cdot P(M/F_4) =$
$= 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.04 =$
$= 0.004 + 0.006 + 0.014 + 0.004 = 0.028$

Ejercicio 4: Para realizar un experimento aleatorio, disponemos de una muestra de cinco concesionarios de coches, de los cuales dos concesionarios tienen 3 coches blancos y 5 azules, otros dos concesionarios tienes 2 coches blancos y 3 azules, y el último concesionario tiene 2 coches blancos y 1 azul. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un coche azul?

Suceso A: 3 blancos y 5 azules

Como existen 2 sucesos A, entonces P(A)=2/5
Probabilidad de escoger 1 azul en estos dos concesionarios P(azul/A)=5/8

Suceso B: 2 blancos y 3 azules

Como existen 2 sucesos B, entonces P(B)=2/5
Probabilidad de escoger 1 azul en estos dos concesionarios P(azul/B)=3/5

Suceso C: 2 blancos y 1 azul

Como existe 1 suceso C, entonces P(C)=1/5
Probabilidad de escoger 1 azul en este concesionario P(azul/C)=1/3

P(azul)=P(A)*P(azul/A)+ P(B)*P(azul/B)+ P(C)*P(azul/C)

$$P(azul) = \left(\frac{2}{5} * \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} * \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{40} + \frac{6}{25} + \frac{1}{15} = 0{,}25 + 0{,}24 + 0{,}06 = 0{,}55$$

Si hubiésemos optado por hacerlos como 5 sucesos individuales:

P(azul) =
P(A)*P(azul/A)+P(A)*P(azul/A)+P(B)*P(azul/B)+P(B)*P(azul/B)+P(C)*P(azul/C)

$$P(azul)=\left(\frac{1}{5}*\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}*\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}*\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}*\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}*\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{40}+\frac{5}{40}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{15}=0{,}55$$

7.- TEOREMA DE BAYES

Sea $A_1, A_2,..., A_n$ un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces:

$$\mathbf{P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\bullet P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\bullet P(B/A_i)}}=\frac{P(\mathbf{P(A_i)\bullet P(B/A_i)})}{P(B)}, \mathbf{i=1,2,...,n}$$

Demostración :

$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B) \quad i=1,...,n$

despejando $P(A_i/B)$ nos queda:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\bullet P(B/A_i)}{P(B)} \qquad ,i=1,\dots,n$$

y por el teorema de la probabilidad total :

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\bullet P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\bullet P(B/A_i)} \qquad ,i=1,\dots,n$$

Ejemplo: Basándonos en el ejercicio anterior, supongamos que realizada la extracción la bola extraída es blanca. Calcular la probabilidad de que sea de la urna nº1.

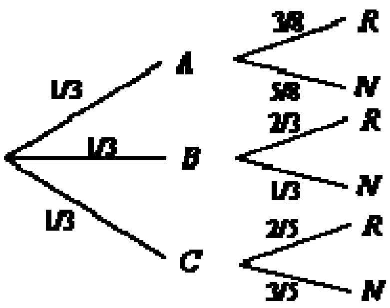
Para resolverlo, tan sólo aplicar la fórmula,

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\bullet P(B/A_1)}{P(A_1)\bullet P(B/A_1)+P(A_2)\bullet P(B/A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}.$$

<u>Ejercicio</u>: Tenemos tres urnas: *A* con 3 bolas rojas y 5 negras, *B* con 2 bolas rojas y 1 negra y *C* con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

Solución:

Para obtener la solución, llamamos *R*= "sacar bola roja" y *N*= "sacar bola negra". En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos *R* o *N* para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es *P(A/R)*. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/R)=\frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{45}{173}=0.260$$

Del ejemplo 4 anterior de los concesionarios, ¿cuál es la probabilidad de que el coche azul elegido sea del concesionario donde hay sólo 2 coches blancos y 1 azul?

Sabíamos que

$$P(azul)=\frac{10}{40}+\frac{6}{25}+\frac{1}{15}=0{,}25+0{,}24+0{,}06=0{,}55$$

entonces,

$$P(C/azul)=\Big/\frac{P(C)*P(azul/C)}{P(A)*P(azul/A)+P(B)*P(azul/B)+P(C)*P(azul/C)}=\frac{\frac{1}{5}*\frac{1}{3}}{0{,}55}=0{,}10$$

8.- COMBINATORIA

El análisis combinatorio se ocupa de la ordenación de los objetos dentro de un conjunto. En este sentido nos facilitará métodos que serán útiles para determinar el número de resultados posibles de un experimento. Veamos a continuación de una forma breve las formulas combinatorias:

Variaciones sin repetición:

Se llaman *Variaciones sin repetición* de **n** elementos tomados en grupos de **m,** a cada uno de los subconjuntos de **m** elementos que se pueden formar con los **n** elementos, teniendo en cuenta el orden. (Importa el orden y no se pueden repetir).

$$\mathbf{V}_n^m = \mathbf{n\ (n\text{-}1)\ ......\ (n\text{-}m\text{+}1).}$$

Ejemplo: Sea un conjunto formado por las letras a, b, c. ¿Cuántos grupos de 2 letras se puede obtener, sin repetir los elementos, teniendo en cuenta el orden?

$$V_3^2 = 3*(3-2+1) = 3*2 = 6$$
$$\{a,b,c\} \to (a,b),(b,c),(b,a),(c,b),(c,a),(a,c) \to 6$$

Variaciones con repetición:

Se llaman *Variaciones con repetición* de **n** elementos tomados en grupos de **m,** a cada uno de los subconjuntos de **m** elementos que se pueden formar con los **n** elementos, teniendo en cuenta el orden. Es la misma definición anterior pero pudiendo repetir los elementos que intervienen en el grupo.

$$\mathbf{VR}_n^m = \mathbf{n}^m$$

Siguiendo con el ejemplo anterior, ¿Cuántos grupos de 2 letras se puede obtener, repitiendo los elementos, teniendo en cuenta el orden?

$$V_3^2 = 3^2 = 9$$
$$\{a,b,c\} \to (a,b),(b,c),(b,a),(c,b),(c,a),(a,c),(a,a),(b,b),(c,c) \to 9$$

Permutaciones sin repetición:

Se llaman *Permutaciones* de **n** elementos a las variaciones sin repetición pero el número de elementos coincide con el número de grupo. (importa el orden y no se pueden repetir).

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{V}_n^n = \boldsymbol{n!}$$

Siguiendo con el ejemplo, ¿Cuántos grupos de 3 letras se pueden obtener, sin repetir los elementos, teniendo en cuenta el orden?

$$P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$$

$$\{a,b,c\} \to (a,b,c),(b,c,a),(c,b,a),(a,c,b),(b,c,a),(c,a,b) \to 6$$

Combinaciones sin repetición:

Se llaman *Combinaciones sin repetición* de **n** elementos tomados en grupos de **m,** a cada uno de los subconjuntos de **m** elementos que se pueden formar con los **n** elementos, sin tener en cuenta el orden. (No importa el orden ni se pueden repetir).

$$\mathbf{C}_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Siguiendo el primer ejemplo:

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!*(3-2)!} = \frac{3*2*1}{2*1*1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\{a,b,c\} \to (a,b),(a,c),(b,c) \to 3\ .$$

Combinaciones con repetición:

Se llaman *Combinaciones con repetición* de **n** elementos tomados en grupos de **m,** a cada uno de los subconjuntos de **m** elementos que se pueden formar con los **n** elementos, sin tener en cuenta el orden. (No importa el orden pero se pueden repetir).

$$\mathbf{CR}_n^m = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

Y por último, terminando el ejemplo

$$C_3^2 = \binom{3+2-1}{2} = \frac{(3+2-1)!}{2!*(3-1)!} = \frac{4!}{2!*2!} = \frac{4*3*2*1}{2*1*2*1} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\{a,b,c\} \to (a,b),(a,c),(b,c),(a,a),(b,b),(c,c) \to 6$$